Trigonométrie

Utilisation de la trigonométrie

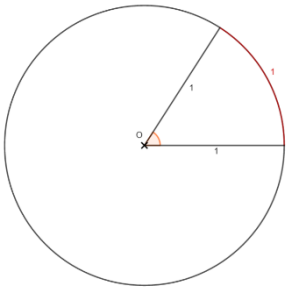
Les domaines scientifiques utilisant la trigonométrie sont nombreux et divers : astronomie, architecture, biologie, cartographie, topographie, optique, géophysique etc.

Par exemple, effectuer un relevé topographique nécessite l'utilisation d'appareils de mesures d'angles comme le théodolite ou le cercle répétiteur.

Par ailleurs, la trigonométrie est employée dans certains domaines d'étude ou de recherche, principalement en mathématiques, en physique et en technologie.

Toutefois, on l'utilise également dans des domaines insoupçonnés comme en théorie de la musique.

1. Le radian

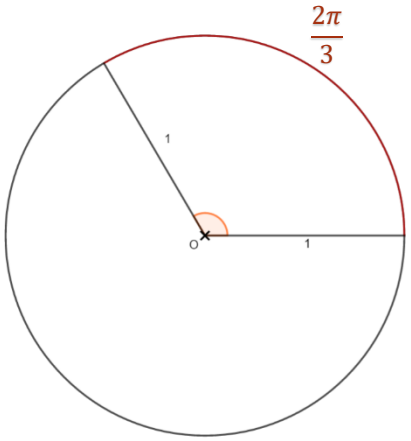


Définition : $\mathscr{C}$ est un cercle de centre O et de rayon 1. Le **radian** (symbole : rad) est la mesure d'un angle au centre qui intercepte, sur le cercle $\mathscr{C}$, un arc de longueur 1.

Exemples : La longueur d'un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1 est de 2π ($P_{cercle} = 2\pi r$).

Dans le cercle $\mathscr{C}$, un angle plat (soit de 180°) intercepte un arc de longueur π donc la mesure de cet angle est aussi π rad.

Par ailleurs, un angle de 120° mesure $\frac{2\pi}{3}$ rad.



Propriété (admise) : Les mesures a en degrés et α en radians d'un même angle sont proportionnelles.

$$\alpha = \frac{\pi}{180} \times a$$

Exemples : Un angle de 45° mesure $\frac{\pi}{180} \times 45$ rad, soit $\frac{\pi}{9\times5\times4} \times 9 \times 5$ rad, c'est-à-dire $\frac{\pi}{4}$ rad. Aussi, un angle de $\frac{7\pi}{12}$ rad mesure $\frac{7\pi}{12} \times \frac{180}{\pi}$ degrés, soit 105°.

Propriété (admise) : La longueur l d'un arc de cercle de rayon r et d'angle au centre de mesure α en radians ($0 \leq \alpha \leq 2\pi$) est $l = r \times \alpha$.

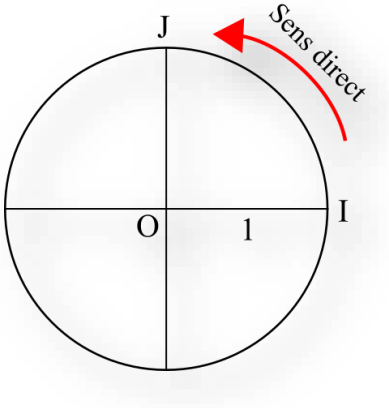
Exemple : La longueur d'un arc de cercle de rayon 3 cm et d'angle au centre de mesure $\frac{2\pi}{3}$ rad est $l = 3 \times \frac{2\pi}{3}$, soit 2π cm.

2. Repérage sur le cercle trigonométrique

A | Enroulement de $\mathbb{R}$ sur un cercle trigonométrique

Définitions :

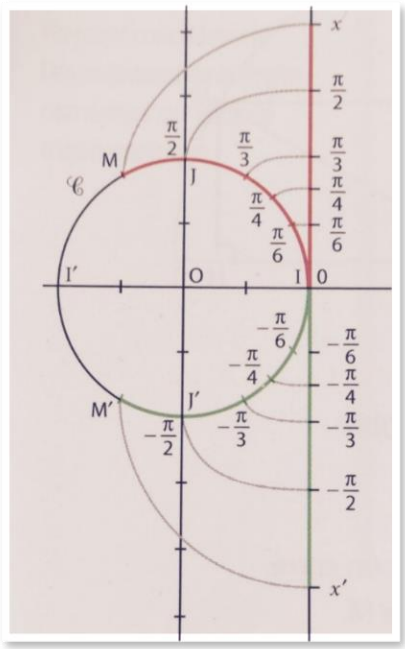
- Un **cercle trigonométrique** est un cercle $\mathscr{C}$ de rayon 1 sur lequel on distingue les deux sens de parcours : le sens direct et le sens indirect.
- Le **sens direct** est celui du sens giratoire en France (sens antihoraire) tandis que le **sens indirect** correspond au sens des aiguilles d'une montre (sens horaire).



Vocabulaire : Le sens direct d'orientation est aussi appelé **sens trigonométrique** ou **sens positif**.

On considère des points I et J de $\mathscr{C}$ tels que :

- (O, I, J) est un repère orthonormé ;
- Le quart de cercle $\overset{\frown}{IJ}$ se parcourt de I à J dans le sens direct.



Soit (d) une droite graduée dont le zéro coïncide avec le point I du cercle trigonométrique (voir figure ci-contre).

On enroule sur le cercle $\mathscr{C}$ la demi-droite rouge des réels positifs dans le sens direct, et la demi-droite verte des réels négatifs dans le sens indirect.

Chaque réel x de la droite (d) vient s'appliquer **sur un point M** unique du cercle $\mathscr{C}$, appelé **image de x** sur $\mathscr{C}$.

B | Point image et nombres réels associés

Propriété : Si x et x' désignent des nombres réels tels que : $x - x' = 2k\pi$ où k est un nombre entier relatif, alors x et x' ont le même point image sur un cercle trigonométrique.

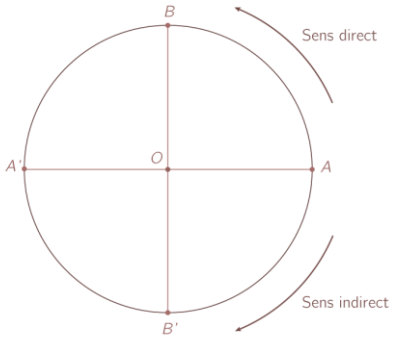
$2k\pi$ représente k tours entiers du cercle trigonométrique.

Démo

Un cercle trigonométrique a pour longueur 2π. Donc les points images de nombres réels x et x' tels que $x - x' = 2k\pi$ sont espacés de $|k|$ tour(s) complet(s) et ils sont confondus.

Conséquence : Si M est le point d'un cercle trigonométrique, image d'un nombre réel x, alors M est aussi le point image des nombres réels $x + 2k\pi$.

Exemples :



- B est associé au réel $\frac{\pi}{2}$, mais aussi au réel $-\frac{3\pi}{2}$. Plus généralement, B est le point image de tous les nombres réels $\frac{\pi}{2} + 2k\,\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. On note $B\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$.

- $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{7\pi}{3}$ ont le même point image sur un cercle trigonométrique. En effet, $\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{\pi}{3} + \frac{6\pi}{3} = \frac{7\pi}{3}$.

Définition : La **mesure principale** d'un angle en radians est sa mesure dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$.

Exemples : La mesure principale de l'angle ayant pour mesure $\frac{4\pi}{3}$ est $-\frac{\pi}{3}$.

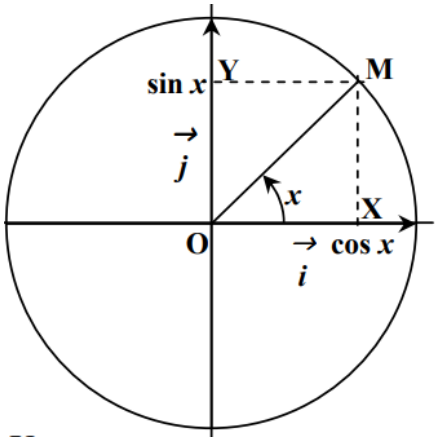
3. Coordonnées d'un point du cercle trigonométrique

A | Définitions et propriétés

Définition : Soit x un reel et M le point associé sur le cercle trigonométrique.

- Le **cosinus** de x, noté $\boldsymbol{\cos x}$, est l'abscisse du point M.
- Le **sinus** de x, noté $\boldsymbol{\sin x}$, est l'ordonnée du point M.

On écrit alors $\boldsymbol{M(\cos x\,;\sin x)}$.



Propriétés : $\forall x \in \mathbb{R}$,

- $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$
- $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$

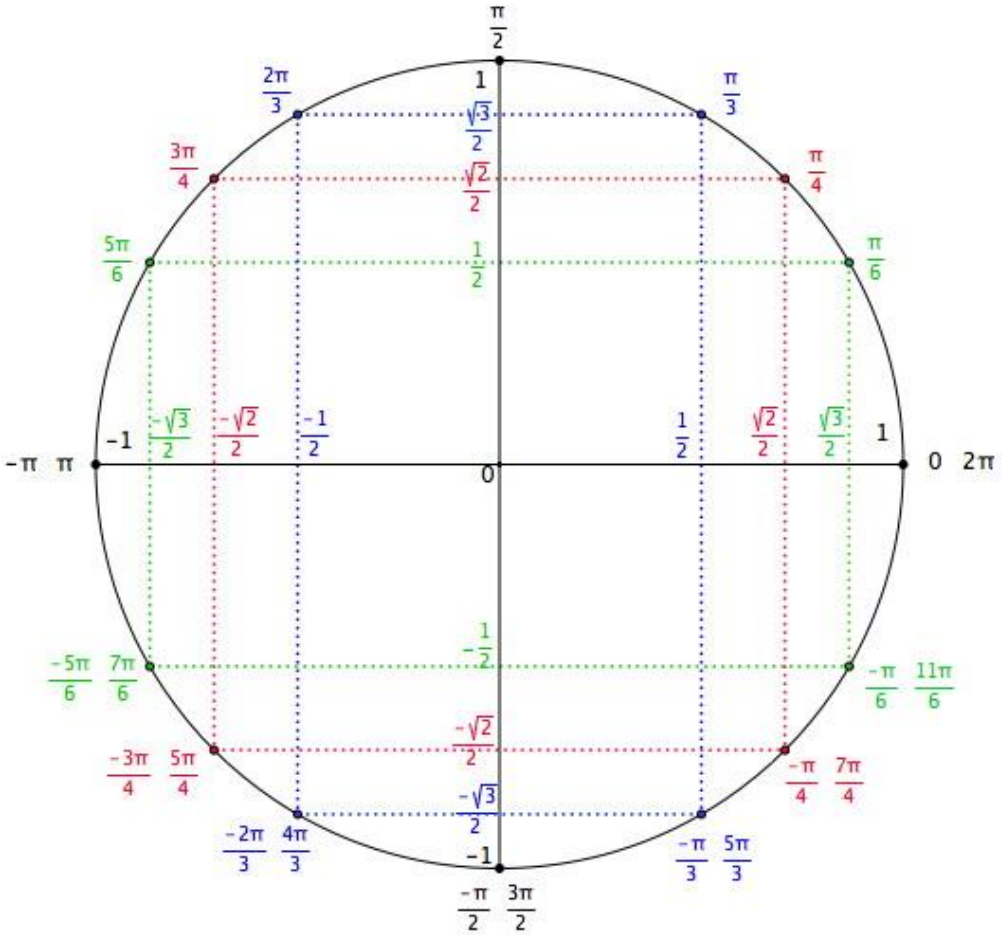
Démonstration

Soit M le point associé au réel x.
Le repère est orthonormé, ainsi, d'après le théorème de Pythagore on a :

$$OM^2 = (x_M - x_O)^2 + (y_m - y_O)^2$$
$$\Leftrightarrow OM^2 = (\cos x)^2 + (\sin x)^2$$

Or, le cercle trigonométrique est de rayon 1, d'où $OM = 1$, donc $OM^2 = 1$, c'est-à-dire $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$.

B | Valeurs remarquables

Tableau des valeurs remarquables :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0